А.В.Фурсиков: Лекция из курса Вариационного Исчисления и Оптимального Управления (4 курс 1-й поток 2012г.)

1. Брахистохрона: строгий вывод уравнения Эйлера

Почему задача важна. а) Исторически первый пример задачи КВИ. б)Некоторая нестандартность обоснования позволяет глубже понять основные принципы вывода необходимых условий экстремума.

Формулировка задачи:

$$J(x)=\int_0^T\sqrt{\frac{1+x'(t)^2}{x(t)}}dt\to\inf,\quad x(0)=0,\quad x(T)=X_T,\qquad (1)$$

где $T>0$ и $x_T>0$ заданы. С помощью хорошо известных „не строгих“ соображений (см., например, [1] стр.24-27) получаем решение $x(t)$ задачи, заданное параметрически:

$$t=C(\tau-\sin\tau),\quad x=C\sin^2\tau/2,\quad \tau\in(0,\tau_0)\qquad (2)$$

где τ_0 определяется из уравнения

$$\frac{x_T}{T}=\frac{\sin^2\frac{T}{2}}{(T-\sin T)},$$

а C – из уравнения $T=C(\tau_0-\sin\tau_0)$.

Строгий вывод необходимых условий экстремума. Он основан на принципе: Функциональное пространство, в котором рассматривается задача, выбирается в соответствии со свойствами этой задачи.

Выбор функционального пространства для задачи (1). Так как в (1) $x(0)=0$, то подинтегральное выражение для интеграла в (1) имеет особенность при $t\to 0$. Поэтому стандартный вывод уравнения Эйлера здесь не годится (ведь он делается в предположении о непрерывной дифференцируемости Лагранжиана). Использовать пространство $C^1[0,T]$ для решений задачи как при стандартном выводе здесь также не получится. Чтобы найти функциональное пространство для решений, подходящее в случае задачи о брахистохроне, выясним, какую особенность имеет решение $x(t)$, определенное в (2), при $t = 0$. Из первого из уравнений (2), определяющего функцию $t(\tau)$ следует, что обратная функция $\tau(t)$ имеет при $t \sim 0$ асимптотику:

$$\tau(t) \sim c_1 t^{1/3}, \quad \text{где} \quad c_1 > 0 \tag{3}$$

В силу (2)

$$x(t) = c \sin \tau(t)/2 \sim c_2 t^{2/3}, \quad \text{где} \quad c_2 > 0 \tag{4}$$

Поэтому функциональное пространство для решений задачи (1) естественно определить формулой:

$$X = \{x(t) = t^{2/3}\tilde{x}(t), \quad \text{где } \tilde{x}(t) \in H^1(0,T)\} \tag{5}$$

Здесь $H^1(0,T)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|x\|^2_{H^1(0,T)} = \int_0^T (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)dt.$$

Отметим, что взять в (5) пространство $C^1[0,1]$ вместо $H^1(0,T)$ нельзя. Это следует из более точного асимптотического разложения решения $x(t)$ задачи (1)[1]:

$$x(t) \sim c_2 t^{2/3} + c_3 t^{4/3} + \dots$$

Действительно, подставляя это разложение в (5), получим $\tilde{x} \sim c_2 + c_3 t^{2/3}$ значит $\tilde{x}' \sim \frac{2}{3} c_3 t^{-1/3} \notin C[0,T]$. Отметим также, что X – это фактически пространство Соболева с весом:

$$X = \{x(t) \in L_2(0,T) : \|x\|_X = \|(t^{-2/3}x)\|_{H^1(0,T)} < \infty\}$$

[1]Чтобы получить уточненное асимптотическое разложение для x, получим сначала уточненное разложение для τ, которое будем искать в виде $\tau \sim c_1 t^{1/3} + ct^\alpha + \dots$,где $\alpha > 1/3, c$-искомые величины. Подставив это разложение в первое из равенств (2), получим

$$t = C(\frac{\tau^3(t)}{3!} - \frac{\tau^5(t)}{5!} + \dots) = C\left(\frac{c_1^3 t + 3sc_1^2 ct^{2/3+\alpha} + \dots}{3!} + \frac{c_1^5 t^{5/3} + \dots}{5!}\right)$$

Чтобы уничтожить члены с t наименьшего порядка, положим $2/3+\alpha = 5/3$, $3c_1^2 c/3! + c_1^5/5! = 0$, откуда находим c и $\alpha = 1$. Подставляя уточненное разложение для τ с $\alpha = 1$ во второе из равенств (2), получим

$$x = \frac{C}{2}\sin^2(c_1 t^{1/3} + ct + \dots) \sim \frac{C}{2}(c_1^2 t^{2/3} + 2c_1 ct^{4/3} + \dots)$$

откуда следует уточненное разложение для x

Множество $\mathfrak{A}$ допустимых функций задачи (1) определяется соотношением:

$$\mathfrak{A} = \{x(t) \in X : x(T) = x_T, x(t) \geq \varepsilon t^{2/3}\}, \tag{6}$$

где X- пространство (5), а число $\varepsilon \in (0, x_T T^{-2/3})$ зависит от $x(t)$. Отметим, что условие $x(t) > 0$ необходимо, чтобы корень квадратный в (1) имел смысл.

Решением задачи (1) называется функция $\widehat{x}(t) \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющая соотношению:

$$J(\widehat{x}) = \min_{x \in \mathfrak{A}} J(x)$$

Теорема *Пусть $\widehat{x} \in \mathfrak{A}$ – решение задачи (1) Тогда*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{x'}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \textit{при почти всех } t \in (0,T),$$

где $\widehat{L}(t) = \sqrt{\frac{1+\widehat{x}'(t)^2}{\widehat{x}(t)}}$.

Доказательство. Возьмем в качестве пространства допустимых вариаций пространство $C_0^\infty(0,T)$ бесконечно дифференцируемых функций с носителем в интервале $(0,T)$. Очевидно, $\forall h \in C_0^\infty(0,T) \exists \lambda_0 > 0 \forall \lambda \in (0,\lambda_0)$ $\widehat{x}(t) + \lambda h(t) \in \mathfrak{A}$. Пусть $\lambda \in (0, \lambda_0)$. По определению решения $\widehat{x}$ задачи (1) имеем

$$0 \leq \frac{J(\widehat{x} + \lambda h) - J(\widehat{x})}{\lambda} \to \int_0^T (\widehat{L}_{x'}(t)h'(t) + \widehat{L}_x(t)h(t))dt \quad \text{при } \lambda \to 0 \tag{7}$$

(При обосновании этого и последующих соотношений используется равенство нулю функции $h(t)$ при t из некоторой окрестности нуля). Так как в (7) можно взять как h, так и $-h$, то из этого соотношения следует, что

$$\int_0^T (\widehat{L}_{x'}(t)h'(t) + \widehat{L}_x(t)h(t))dt = 0 \quad \forall h \in C_0^\infty(0,T). \tag{8}$$

Учитывая, что $\widehat{x} = t^{2/3}\tilde{x}$, где $\tilde{x} \in H^1(0,T)$, получим:

$$\widehat{L}_{x'} = \frac{\widehat{x}'(t)}{\sqrt{(1+\widehat{x}'(t)^2)\widehat{x}(t)}} = t^{-1/3}y(t), \quad \text{где} \quad y(t) \in L_2(0,T), \tag{9}$$

$$\widehat{L}_x = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{1+\widehat{x}'(t)^2}}{\widehat{x}^{3/2}(t)} = t^{-4/3}z(t), \quad \text{где} \quad z(t) \in L_2(0,T), \tag{10}$$

Интегрируя в (8) по частям, будем иметь:

$$\int_0^T (\widehat{L}_{x'}h' + \widehat{L}_x h)dt = \int_0^T (\widehat{L}_{x'}(t) + \int_t^T \widehat{L}_x d\tau)h'(t)dt - \int_t^T \widehat{L}_x d\tau h(t)|_0^T \quad (11)$$

Из (8),(11) следует, что

$$\int_0^T (\widehat{L}_{x'}(t) + \int_t^T \widehat{L}_x d\tau)h'(t)dt \quad \forall h \in C_0^\infty(0,T). \quad (12)$$

В силу (9) $\widehat{L}_{x'} \in L_1(0,T)$. В силу (10)

$$\left|\int_t^T t^{-4/3}z(t)dt\right| \le \left(\int_t^T t^{-8/3}dt \int_t^T z^2 dt\right)^{1/2} \le c_1 + c_2 t^{-5/6} \in L_1(0,T) \quad (13)$$

Доказательство утверждения, что если $f \in L_1$ и $\int_0^T f\varphi' dt = 0$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(0,T)$, то $f(t) \equiv \text{const}$, проводится в точности так же как в лемме Дюбуа–Реймона. Поэтому из (12),(13) следует утверждение теоремы.

Литература

1. В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин. Оптимальное управление. М. Наука, 1979.

2. Э.М.Галеев, М.И.Зеликин и др. Оптимальное управление. М. Изд. МЦНМО, 2008.