ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

по физико-математическим наукам

Введение

Настоящая экзаменационная программа соответствует утвержденному паспорту научной специальности "**Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**". В основу программы положены следующие дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, уравнения с частными производными, оптимальное управление, а также ряд отдельных вопросов функционального анализа и теории функциональных пространств.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Теоремы (Пикара, Пеано) существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем. ([3], §3, 20, 21; [5], гл. II, §1, [7], гл.2, §4, 5, 8.)
2. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметра. Производная решения по параметру. ([3], §22, 24, 25, [7], гл. 2, § 7, гл.5, § 23.)
3. Теоремы о продолжении решения задачи Коши. ([3], §22, 24, 25, [7], гл. 2, §6.)
4. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. ([5], гл. III, [7], гл. 2, §8.)
5. Линейные уравнения высокого порядка. Структура общего решения линейных однородных и неоднородных уравнений. Формула Лиувилля – Остроградского, метод вариации постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. ([3], §3, 20, 21; [5], гл.V, VI, VII, [7], гл.3, §10-12.)
6. Системы линейных уравнений. Экспонента матрицы. Матрица Коши, формула Лиувилля – Остроградского, методы интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами. ([4], §17, 18; [5], гл. VII, §2, [7], гл.3, §9, 14, 15.)
7. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке. ([7], гл.3, §16.)
8. Автономные системы линейных и нелинейных уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы. Построение фазового портрета. ([3], §15, 16, [7], гл. 4, §17, 21, 22).

9. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению. ([3], §26; [5], гл.VII, §6, [7], §18-20).
10. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи. ([7], гл. 4, §13.)
11. Линейные уравнения второго порядка. Нули решений. Теорема сравнения. Теорема Штурма. Достаточные условия колеблемости решений. ([5], гл.IV, §2; [7], гл.3, §12).
12. Задача Штурма - Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций ([6], гл. II, §3, п.9).
13. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори ([8], §1).
14. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. ([5], гл.VIII, [7], гл. 5, §26.)

Уравнения с частными производными

15. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теорема Коши–Ковалевской. ([2], гл. I, §1, [11], §2).
16. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики. ([1], гл. I, §3; [2], гл. I, §2, [6], гл. I, §1,2).
17. Задача Коши для волнового уравнения и методы ее решения. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа. Метод спуска. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.) ([1], гл.II, §5, [2], гл. 1, §2; [6], гл. 2, §2).
18. Смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье. ([6], гл. 2, §3).
19. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.) ([2], гл. IV, §3; [10], гл. 3, §28).
20. Задача Коши и смешанные задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.) ([10], гл. IV, §38, 39, 40; [6], гл. 3, §3).
21. Обобщенные функции. Действия с обобщенными функциями. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье. ([1], гл. II, §5-7, 9).
22. Пространства Соболева W_p^m. Теоремы вложения, следы функций из W_p^m на границе области. ([2], гл.3, §5 - 8).
23. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Вариационный метод решения краевых задач. ([11], гл. 3, §3.13). Краевые задачи на собственные функции и собственные значения ([1], гл.V, §21, [2], гл. IV, §1).

Оптимальное управление

24. Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них. Определение производных, основные теоремы дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Теоремы о неявной функции и обратном отображении. Теорема Люстерника о касательном пространстве. ([13], стр. 115-182).
25. Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай бесконечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача и задача Лагранжа в классическом вариационном исчислении; уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа ([13], стр. 58, 297-314). Простейшие вариационные неравенства ([17], стр. 157-160).
26. Достаточные условия для бесконечномерных задач с равенствами и неравенствами ([13], стр.287-296). Простейшая задача вариационного исчисления: необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.
27. Связь между лагранжианом и гамильтонианом. Уравнение Гамильтона-Якоби. ([9], гл. 3, §3; [13], стр. 370-391).
28. Принцип максимума Понтрягина ([4], гл. I, §1- 4, примеры 1,2; гл. V, §29, 30).
29. Решение конкретных задач вариационного исчисления и оптимального управления и экстремальных задач анализа, геометрии, теории аппроксимации ([15], стр. 421-439; [16], стр. 89-149).
30. Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления. Теоремы о субдифференциале и об очистке. ([13], стр. 208-237; [17], стр. 21-52). Принцип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна-Таккера ([13], стр. 52-58).
31. Теоремы двойственности в выпуклом программировании ([14], стр. 110-168; [16], стр. 60-62). Теоремы двойственности и симплекс метод в линейном программировании. Транспортная задача и задача о назначении ([16], стр. 62-65, 80-82, 158-160; [16], стр.94-137).

Динамические системы

32. Общее понятие структурной устойчивости. Критерий Андронова-Понтрягина структурной устойчивости векторных полей на сфере ([12], §10).
33. Диффеоморфизмы окружности: число вращения; диффеоморфизмы с рациональным числом вращения. Теорема о равномерном распределении для иррациональных поворотов окружности. Теорема Данжуа (без доказательства). Описание структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности ([12], §11).
34. Структурная устойчивость Анонсовского диффеоморфизма тора. Определение диффеоморфизмов Аносова и формулировка теоремы об их структурной устойчивости ([12], §§13,14).
35. Общая задача теории бифуркаций. Лемма Сарда. Теорема трансверсальности. Семейства общего положения. Бифуркация Андронова – Хопфа ([12], §§10, 29, 33).
36. Системы, сохраняющие меру, эргодичность. Возращаемость по Пункаре. Эргодическая теорема.

Основная литература

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 1988.
[2] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.
[3] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1998.
[4] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1963.
[5] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд-во ЛКИ, 2008.
[6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.
[7] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, 2007.
[8] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Изд-во физматлит, 1985.
[9] Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
[10] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1971.
[11] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 2005.
[12] Арнольд В.И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1978.
[13] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
[14] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
[15] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
[16] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
[17] Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др. Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008.
[18] Каток А.Б., Хасселблат Б. "Введение в современную теорию динамических систем" / М.: Факториал, 1999.

Дополнительная литература

[19] Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. - М.: Наука, 1978 г. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией Владимирова В.С. М.: Физматлит, 2003.
[20] Лакс П. Гиперболические уравнения с частными производными.-М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
[21] Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин А.Г. Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. – М: МГУ, 1999.
[22] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
[23] Villani C. Topics in optimal transportation. Graduate studies in mathematics. Vol.

58, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003.
[24] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
[25] Нестеров Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010.
[26] Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
[27] Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: Наука, 1970.
[28] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
[29] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
[30] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных. Москва-Ижевск: 2003.
[31] Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.
[32] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Изд-во физ.мат.лит. 1977.

Литература для факультативного чтения

[33] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М.: Мир, 1972.
[34] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд-во ЛКИ, 2008.
[35] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Наука, 1961.
[36] Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Изд. центр Академия, 2013.
[37] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1985.
[38] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. - М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
[39] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1980.

Дополнительные вопросы по уравнениям в частных производных

1. Псевдодифференциальные операторы (ПДО) (определение, символ композиции двух ПДО, параметрикс, свойство псевдолокальности эллиптического ПДО) ([19], гл. I, §1-3).
2. Нелинейные уравнения первого порядка. Метод характеристик. Задача Коши для уравнений первого порядка ([9], гл. 3 §1,2, [21]).
3. Гиперболические системы законов сохранения. Постановка задачи Коши. Определения классических и обобщенных решений. Условия Ранкина-

Гюгонио. Допустимые разрывы. Задача Римана о распаде разрыва для одного уравнения ([21], [20], гл. 10, §1; [9], гл. 3, §4, гл. 11 §1,2).

4. Методы доказательства существования решений нелинейных уравнений, основанные на вариационных методах. Примеры их применения к доказательству теорем о существовании решений нелинейных краевых задач ([9], гл. 8, §1,2).
5. Методы доказательства существования решений нелинейных уравнений, основанные на теоремах о неподвижной точке. Теоремы Браудера-Минти, Банаха, Шаудера, Шеффера. Примеры их применения к доказательству теорем о существовании решений нелинейных краевых задач ([9], гл.9, §1, 2).
6. Примеры «разрушения» решения. Полулинейные эллиптические уравнения. Понятие о критической нелинейности. Доказательство несуществования нетривиальных решений краевых задач ([9], гл. 9, §4).

Дополнительные вопросы по оптимальному управлению

1. Существование решений экстремальных задач; принцип компактности, пространства Соболева, их полнота и рефлексивность при $p>1$. Теорема Тонелли в многомерном вариационном исчислении ([17], стр. 130-152). Теорема Дубовицкого-Милютина, принцип Лагранжа и приложения к некорректным краевым задачам в частных производных ([24], стр. 73-81, 95-100).
2. Задача об оптимальном перемещении масс. Двойственность Монжа-Канторовича ([32], стр.299-315; [23], стр. 1-9, 17-46).
3. Алгоритмы поиска решений гладких, выпуклых и вариационных экстремальных задач. Метод центрированных сечений, метод эллипсоидов, метод симплексов ([17], стр. 169-184). Метод внутренней точки (самосогласованные барьеры, [25], стр. 207-249). Градиентный метод и его обобщения ([22], стр.234-249). Полуопределенное программирование ([25], стр. 256-261).
4. Теорема фон-Неймана о существовании седловой точки в смешанных стратегиях для конечных антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой. Теорема о существовании цены игры в случае, когда пространства стратегий игроков компактны, а плата непрерывна ([26], гл. 2; [26], гл. 3).
5. Равновесие Нэша. Теорема о существовании равновесия в смешанных стратегиях для конечных игр N лиц. Паретовские решения. Ядро игры ([25], гл. 8,9). Характеристическая функция игры ([27], гл.3).
6. Дифференциальные игры двух лиц. Уравнение Гамильтона-Якоби-Айзекса-Беллмана как достаточное условие оптимальности. Характеристики уравнения Гамильтона-Якоби-Айзекса-Беллмана и принцип минимакса ([27], гл. 4; [31], гл. 2). Операции Минковского над выпуклыми множествами. Метод исчезающей вязкости ([29], гл. 14,15; [30], гл. 1).