ПРОГРАММА

основной научной специальности 01.01.09 –

дискретная математика и математическая кибернетика

Данная программа предназначена для подготовки аспирантов по специальности ВАК 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика и предполагает чтение годового специального курса.

РАЗДЕЛ А.

Теория экстремума и оптимальное управление

1. Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них. Определение производных, основные теоремы дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Теоремы о неявной функции и обратном отображении. Теорема Люстерника о касательном пространстве.([1], стр. 115-182).
2. Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай бесконечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача и задача Лагранжа в классическом вариационном исчислении; уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа ([1], стр. 58, 297-314). Простейшие вариационные неравенства ([6], стр. 157-160).
3. Достаточные условия для бесконечномерных задач с равенствами и неравенствами ([1], стр. 287-296). Простейшая задача вариационного исчисления: необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка. Уравнение Гамильтона-Якоби ([1], стр. 370-391).
4. Принцип максимума Понтрягина ([2], стр. 86-131).
5. Решение конкретных задач анализа, геометрии, теории аппроксимации, вариационного исчисления и оптимального управления ([4], стр. 421-439; [5], стр. 89-149).

6. Существование решений экстремальных задач; принцип компактности, пространства Соболева, их полнота и рефлексивность при p>1. Теорема Тонелли в многомерном вариационном исчислении ([6], стр. 130-152). Теорема Дубовицкого-Милютина, принцип Лагранжа и приложения к некорректным краевым задачам в частных производных ([10], стр. 73-81, 95-100).

Выпуклый анализ и математическое программирование

7. Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления. Теоремы о субдифференциале и об очистке. ([1], стр. 208-237; [5], стр. 21-52). Прицип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна-Таккера ([1], стр. 52-58).
8. Теоремы двойственности в выпуклом программировании ([3], стр. 110-168; [5], стр. 60-62). Теоремы двойственности и симплекс метод в линейном программировании. Транспортная задача и задача о назначении ([5], стр. 62-65, 80-82, 158-160; [5], стр.94-137).
9. Задача об оптимальном перемещении масс. Двойственность Монжа-Канторовича ([8], стр.299-315; [9], стр. 1-9, 17-46).
10. Алгоритмы поиска решений гладких, выпуклых и вариационных экстремальных задач. Метод центрированных сечений, метод эллипсоидов, метод симплексов ([6], стр. 169-184). Метод внутренней точки (самосогласованные барьеры, [11], стр. 207-249). Градиентный метод и его обобщения ([7], стр.234-249). Полуопределенное программирование ([11], стр. 256-261).

Теория игр

11. Теорема фон-Неймана о существовании седловой точки в смешанных стратегиях для конечных антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой. Теорема о существовании цены игры в случае, когда

пространства стратегий игроков компактны, а плата непрерывна ([12], гл. 2; [13], гл. 3).

12. Равновесие Нэша. Теорема о существовании равновесия в смешанных стратегиях для конечных игр N лиц. Паретовские решения. Ядро игры ([12], гл. 8,9). Характеристическая функция игры ([13], гл.3).

13. Дифференциальные игры двух лиц. Уравнение Гамильтона-Якоби-Айзекса-Беллмана как достаточное условие оптимальности. Характеристики уравнения Гамильтона-Якоби-Айзекса-Беллмана и принцип минимакса ([14], гл. 4; [17], гл. 2). Операции Минковского над выпуклыми множествами. Метод исчезающей вязкости ([15], гл. 14,15; [16], гл. 1).

Литература к разделу А

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[2] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[3] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[4] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

[6] Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др. Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008.

[7] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.

[8] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Изд-во физ.мат.лит. 1977.

[9] Villani C. Topics in optimal transportation. Graduate studies in mathematics. Vol. 58, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003.

[10] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.

[11] Нестеров Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010.

[12] Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

[13] Фон-Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. .: Наука, 1970.

[14] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

[15] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[16] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных. Москва-Ижевск: 2003.

[17] Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.

РАЗДЕЛ Б.

Теория функциональных систем

1. Многозначные логики. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций алгебры логики ([1], часть I, гл. 1, § 5, 6). Алгоритм распознавания полноты систем функций k-значной логики ([1], часть I, гл. 2, § 3). Теорема Слупецкого-Яблонского ([1], часть I, гл. 2, § 4). Особенности k-значных логик ([1], часть I, гл. 2, § 5).
2. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах ([2], гл. 1, гл. 2, § 1, 2, 7, 8; [5], вып. 3, с. 147-166). Эксперименты с автоматами ([2], гл.2, § 4-6: с.57-67, 80-84). Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов ([2], гл. 3, §1-6, 10).
3. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга ([3], § 1, 2, 3.1-3.4, 12.1-12.3). Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях ([3], §13.1).

Комбинаторный анализ и теория графов

4. Элементы комбинаторного анализа. Основные комбинаторные числа. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел ([1], часть II, § 1, 2, 4).
5. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов ([1], часть III; [4], гл. 1, 2). Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности) ([9], § 36-39: с. 150-160). Экстремальная теория графов. Теорема Турана ([4], гл. 13, § 13.4). Теорема Рамсея ([4], гл. 13, § 13.5).

Теория кодирования

6. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью ([1], часть IV, § 1, 3, 4).
7. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку ([1], часть IV, § 5). Конечные поля и их основные свойства ([12]). Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема ([5], с. 83-94; [12]). Коды Рида-Маллера ([12]).

Теория управляющих систем

8. Понятие управляющей системы. Основные модельные классы управляющих систем: дизъюнктивные нормальные формы, формулы, контактные схемы, схемы из функциональных элементов, автоматы, машины Тьюринга, операторные алгоритмы. Основные проблемы теории управляющих систем ([8], вып. 2, с. 7-12; вып. 1, с. 78-81; вып. 9, с. 5-22).
9. Дизъюнктивные нормальные формы. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме ([1], часть V, гл. 1, § 1-4). Тупиковые и минимальные ДНФ. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ СУММА ТУПИКОВЫХ с помощью локального алгоритма ([1], часть V, гл. 1, § 5-7). Невозможность построения ДНФ СУММА МИНИМАЛЬНЫХ в классе локальных алгоритмов ([6], раздел 2, гл. II, § 14).
10. Синтез и сложность управляющих систем. Асимптотически оптимальный метод Лупанова синтеза схем из функциональных элементов ([8], вып. 10. с. 63-72, 89-93). Асимптотически оптимальный метод Лупанова синтеза контактных схе ([8], вып. 10, с. 73-83, 94-96). Инвариантные классы Яблонского и их свойства ([8],

вып. 2, с. 82-89). Синтез схем для функций из некоторых инвариантных классов ([8], вып. 14, с. 37-39, 59-61; [1], часть V, § 7, 8).

11. Нижние оценки сложности реализации булевых функций параллельно-последовательными контактными схемами ([7], гл. 8, § 5). Нижние оценки сложности реализации булевых функций формулами в произвольном базисе ([7], гл.8, § 6).

12. Эквивалентные преобразования управляющих систем Эквивалентные преобразования формул алгебры логики ([1], часть I, гл. 1, § 1-4). Эквивалентные преобразования контактных схем ([8], вып. 5, с. 61-70). Эквивалентные преобразования операторных алгоритмов ([8], вып. 1, с. 75-112). Пример Линдона ([5], вып. 1, с. 246-248).

13. Надежность и контроль функционирования управляющих систем. Построение надежных контактных схем из ненадежных контактов ([5], вып. 1, с. 109-148). Логический подход к контролю исправности и диагностике неисправностей управляющих систем. Тесты ([10], с. 270-293; [11], вып. 1, с. 16-20).

Дискретная оптимизация

14. Потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм нахождения максимального потока. Теорема о целочисленности. Теорема Кенига-Эгервари. Теорема Холла. Теорема Дилуорса ([13]).

15. Задачи целочисленного линейного программирования и алгоритмы их решения. Метод Гомори. Метод ветвей и границ ([14]). Задача коммивояжера. Сводимость комбинаторных проблем. Классы сложности P и NP. Приближенные методы решения NP-трудных задач ([15]).

Основная литература к разделу Б

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Мальцев А. И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986.

[4] Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980.

[5] Кибернетический сборник. Вып. 1-9; вып. 1-28 (новая серия). М.: Мир, 1960-1990.

[6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том I. / Под общ. ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. М.: Наука, 1974.

[7] Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[8] Проблемы кибернетики. Вып. 1-41. М.: Наука, 1959-1984.

[9] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

[10] Труды Математического института им. В. А. Стеклова. Том 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

[11] Математические вопросы кибернетики. Вып. 1-10. М.: Наука, 1988-2001.

[12] МакВильмс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.

[13] Форд Л., Фалкерсон Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

[14] Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. М.: Наука, 198.

[15] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Дополнительная литература к разделу Б

[1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] Сэведж Дж. Э. Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998.

[3] Марков А. А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982.

[4] Орлов В. А. Простое доказательство алгоритмической неразрешимости некоторых задач о полноте автоматных базисов. // Кибернетика. 1973. № 4. С. 109-113.

[5] Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.

[6] Соловьев Н. А. Тесты (теория, построение, применения). Новосибирск: Наука, 1978.

[7] Дистель Р. Теория графов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002.

[8] Угольников А. Б. Эквивалентные преобразования формул в P_2 // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механ. 2009. № 5. С.25-32.

<u>РАЗДЕЛ В</u>.

1. Класс P_2 булевских функций. Таблицы, формулы, суперпозиции. Выразимость и полнота множеств булевских функций. Теорема Жегалкина. Теорема Поста для P_2.
2. Класс P_k функций k-значной логики. Конечная порожденность P_k. Теорема Кузнецова о полноте в P_k.
3. Теорема Слупецкого.
4. Теоремы Янова и Мучника. Обобщение теоремы Жегалкина для P_k.
5. ДНФ и их типы: совершенная, сокращенная, тупиковая, минимальная ДНФ. Алгоритмы поиска таких ДНФ.
6. Автоматы и эксперименты с ними. Теоремы Мура об экспериментах с автоматами.
7. Теорема Клини об автоматах как акцепторах.
8. Операции суперпозиции и композиции над автоматами. Неконечная и конечная порожденность классов автоматов с такими операциями, соответственно.
9. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов.
10. Вычислимые и частично-рекурсивные функции. Теорема о совпадении этих классов.
11. Временная сложность решения задач дискретной оптимизации. Основные классы сложности типа P, NP.
12. Оптимальный по порядку метод Шеннона синтеза схем из функциональных элементов, реализующих булевские функции.
13. Асимптотически оптимальный метод Лупанова синтеза формул, реализующих булевские функции.
14. Теорема Понтрягина-Куратовского о плоских графах.
15. Теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке через сеть.

16. Эквивалентные преобразования формул в Р2. Пример Линдона для функций P_k при k>5.
17. Алфавитное кодирование. Критерий Маркова однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана.
18. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
19. Коды Хемминга.
20. Конечные поля. Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема.

Литература к разделу В

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2002.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Носов В. А. Основы теории алгоритмов и анализа их сложности. Курс лекций. М.: 1992.

[4] Носов В. А. Комбинаторика и теория графов. Учебное пособие. Московский государственный институт электроники и математики. М.: 1999.

[5] Галатенко А. В. Об одном простом критерии планарности графов. "Интеллектуальные системы", том 7, выпуск 1-4, 2003.

[6] Линден Р. К. Тождества в конечных алгебрах. "Кибернетический сборник", выпуск 1 (старая серия).

[7] Берлекамп Э. Алгебраическая теория кодирования. М.: Мир, 1971.

[8] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

[9] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

[10] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

[11] Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.