

Лекции 1–4. Вязкопластические среды: принцип виртуальных мощностей, вариационная задача.

1 Уравнения движения.

Пусть $\rho(x, t) > 0$ — плотность сплошной среды, $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$ — скорость, $\sigma_{ij}(x, t)$ — тензор напряжения, $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))$ — внешние массовые силы.

Напомним, что из закона сохранения массы было получено уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам происходит суммирование), а из закона сохранения количества движения — уравнения

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_\alpha - \sigma_{i\alpha})}{\partial x_\alpha} = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Обозначим $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

Предположим, что сплошная среда несжимаема, то есть $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Тогда $\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$. Отсюда и из (1.1) получаем *уравнение Эйлера*

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = f_i. \quad (1.2)$$

Предположим также, что $\sigma_{i\alpha} = \sigma_{\alpha i}$.

Пусть при каждом $t \in \mathbb{R}$ сплошная среда занимает область Ω_t , а поля скоростей v принадлежат аффинному пространству U_t (например, U_t — множество гладких векторных полей с нулевой дивергенцией, удовлетворяющих граничному условию $v|_{\partial\Omega_t} = \varphi_t$). Тогда вариации скоростей принадлежат некоторому линейному пространству H_t .

Рассмотрим произвольное $h(\cdot, t) \in H_t$, умножим (1.2) скалярно на $h(x, t)$ и проинтегрируем по Ω_t :

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i dx - \int_{\Omega_t} \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} h_i dx = \int_{\Omega_t} f_i h_i dx.$$

Обозначим

$$h_{i\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} \right), \quad P = (\sigma_{i\alpha}).$$

Применяя формулу Стокса и пользуясь симметричностью $\sigma_{i\alpha}$, получаем

$$- \int_{\Omega_t} \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} h_i dx = \int_{\Omega_t} \sigma_{i\alpha} \frac{\partial h_i}{\partial x_\alpha} dx - \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma_{i\alpha} h_i) dx = \int_{\Omega_t} \sigma_{i\alpha} h_{i\alpha} dx - \int_{\partial\Omega_t} (Ph) dS$$

(здесь и далее $\int_{\partial\Omega_t} v dS$ обозначает поверхностный интеграл второго рода). Значит,

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i dx + \int_{\Omega_t} \sigma_{i\alpha} h_{i\alpha} dx = \int_{\Omega_t} f_i h_i dx + \int_{\partial\Omega_t} (Ph) dS. \quad (1.3)$$

Это соотношение называется *принципом виртуальных мощностей*.

Девиатором матрицы $M = (M_{ij})_{i,j=1}^n$ назовем матрицу $\tilde{M} = M - \frac{1}{n}(\text{tr } M)I$, где I — единичная матрица. Заметим, что $\text{tr } \tilde{M} = 0$.

В силу условия несжимаемости, в соотношении (1.3) тензор напряжений σ_{ij} может быть заменен на его девиатор τ_{ij} :

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i dx + \int_{\Omega_t} \tau_{i\alpha} h_{i\alpha} dx = \int_{\Omega_t} f_i h_i dx + \int_{\partial\Omega_t} (Ph) dS. \quad (1.4)$$

Поскольку матрицы $h_{i\alpha}$ и $\tau_{i\alpha}$ симметричны и имеют нулевой след, то они имеют пять независимых элементов, соответствующих $1 \leq i \leq \alpha \leq 3$, $(i, \alpha) \neq (3, 3)$.

Тензором скоростей деформаций называется матрица $(e_{ij}(v))$,

$$e_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Обозначим $e_v = (e_{ij}(v))_{1 \leq i \leq j \leq 3, (i,j) \neq (3,3)}$. Тогда существует и единственна вектор-функция $s(x) = (s_{ij}(x))_{1 \leq i \leq j \leq 3, (i,j) \neq (3,3)}$ такая, что

$$\int_{\Omega_t} \tau_{ij} h_{ij} dx = \int_{\Omega_t} s(x) \cdot e_h(x) dx.$$

В этих обозначениях (1.4) приобретает вид

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} h_i dx + \int_{\Omega_t} s(x) \cdot e_h(x) dx = \int_{\Omega_t} f \cdot h dx + \int_{\partial\Omega_t} (Ph) dS. \quad (1.5)$$

Для замыкания системы уравнений движений нужна связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации. В зависимости от вида этой связи получаются различные модели сплошной среды.

Обозначим 2^X совокупность всех подмножеств множества X .

Сплошная среда называется *вязкой однородной средой*, если она несжимаема и задана связь между вектор-функцией $s(x)$ и тензором скоростей деформаций с помощью некоторого многозначного отображения: $s(x) \in A(e_v(x))$; при этом, соотношение (1.5) однозначно разрешимо относительно v в области Ω_t (см. [1]).

Оказывается, что для однозначной разрешимости достаточно, чтобы отображение A было монотонным (т.н. *постулат Друкера*).

Определение 1.1. *Отображение $A : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ называется монотонным, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in A(x)$, $v \in A(y)$ выполнено $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$.*

Пример. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Построим по ней отображение

$$A(x) = [f(x - 0), f(x + 0)].$$

Нетрудно проверить, что это отображение монотонное.

Чтобы получить теорему единственности, сначала докажем два вспомогательных утверждения.

Предложение 1. Пусть g^t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на \mathbb{R}^n , порождаемое уравнением $\dot{x} = v(x, t)$, $J(\xi, t)$ — якобиан отображения $x \mapsto g^t x$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\xi, t) = J(\xi, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(g^t \xi, t). \quad (1.6)$$

Доказательство. Пусть $t, \Delta t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $\tilde{g}^{\Delta t}$, сопоставляющее точке η решение уравнения $\frac{dx}{d\tau} = v(x, t + \tau)$ с начальными условиями $x|_{\tau=0} = \eta$, $\tilde{J}(\eta, \Delta t)$ — его якобиан в точке η . Тогда $g^{t+\Delta t} = \tilde{g}^{\Delta t} \circ g^t$. Применяв теорему о производной композиции и формулу для определителя произведения матриц, получаем

$$J(\xi, t + \Delta t) = \tilde{J}(g^t \xi, \Delta t) J(\xi, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} J(\xi, t) = J(\xi, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}(g^t \xi, \Delta t) - 1}{\Delta t}.$$

Тем самым, для доказательства (1.6) достаточно рассмотреть $t = 0$. Пусть матрица Якоби отображения g^t в точке ξ имеет вид $(\alpha_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$. Заметим, что при $t = 0$ это единичная матрица.

По определению, $J(t, \xi) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n \alpha_{i, \pi(i)}(t)$, где S_n — группа перестановок n элементов. Имеем

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{i, \pi(i)}(t) \right) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \alpha_{j, \pi(j)}(0) \right) \alpha'_{i, \pi(i)}(0).$$

Если перестановка π не является тождественной, то хотя бы для двух значений j выполнено $\pi(j) \neq j$, и сумма равна 0. Если π — тождественная, то сумма равна $\sum_{i=1}^n \alpha'_{ii}(0)$. Переставив порядок дифференцирования по t и по ξ_i и воспользовавшись дифференциальным уравнением, получаем, что $\alpha'_{ii}(0) = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i}(\xi, 0)$. \square

Предложение 2. Пусть g^t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на \mathbb{R}^n , порождаемое уравнением $\dot{x} = v(x, t)$, $\Omega_t = g^t \Omega$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + \int_{\partial \Omega_t} f(x, t) v(x, t) dS.$$

Доказательство. Пусть $J(\xi, t)$ — якобиан отображения $x \mapsto g^t x$. Воспользуемся формулой замены переменной под знаком интеграла, равенством (1.6) и формулой Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(g^t \xi, t) J(\xi, t) d\xi = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(g^t \xi, t) J(\xi, t) d\xi + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} f(g^t \xi, t) v_i(g^t \xi, t) J(\xi, t) d\xi + \\ &+ \int_{\Omega} f(g^t \xi, t) J(\xi, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(g^t \xi, t) d\xi = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x, t) v_i(x, t)) dx = \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + \int_{\partial \Omega_t} f(x, t) v(x, t) dS. \end{aligned}$$

\square

Теорема 1.1. Пусть $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow 2^{\mathbb{R}^5}$ — монотонное многозначное отображение, $\rho \equiv \text{const}$, v — гладкое решение задачи (1.5), Ω_t — область, задаваемая этим решением. Пусть w — другое решение задачи (1.5) в Ω_t с граничными условиями $w|_{t=0} = v|_{t=0}$, $w|_{\partial\Omega_t} = v|_{\partial\Omega_t}$. Тогда $w = v$.

Доказательство. Пусть $h = v - w$. Вычтем друг из друга равенства (1.5) для v и для w и получим

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) h dx + \int_{\Omega_t} (s(e_v) - s(e_w)) e_h dx = 0.$$

В силу монотонности отображения A и равенства $h_{i\alpha} = e_{i\alpha}(v) - e_{i\alpha}(w)$,

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) h dx \leq 0,$$

т.е.

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(h_i \frac{\partial v_i}{\partial t} - h_i \frac{\partial w_i}{\partial t} + h_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - h_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j \right) dx = \int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |h|^2}{\partial t} + h_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - h_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j \right) dx \leq 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho \left(h_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - h_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} w_j \right) dx &= \int_{\Omega_t} \rho \left(h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} w_j \frac{\partial |h|^2}{\partial x_j} \right) dx = \\ &= \int_{\Omega_t} \rho \left(h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial (|h|^2 w_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{2} |h|^2 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right) dx = \int_{\Omega_t} \rho h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \end{aligned}$$

поскольку $h|_{\partial\Omega_t} = 0$ и $\frac{\partial w_j}{\partial x_j} = 0$. В силу предложения 2,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \frac{|h|^2}{2} dx = \int_{\Omega_t} \frac{\rho}{2} \frac{\partial |h|^2}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega_t} \frac{\rho |h|^2}{2} v dS = \int_{\Omega_t} \frac{\rho}{2} \frac{\partial |h|^2}{\partial t} dx.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \frac{|h|^2}{2} dx \leq - \int_{\Omega_t} \rho h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx;$$

поэтому в силу условия $h|_{t=0} = 0$, ограниченности функций $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ и неравенства Гельдера

$$F(x, t) := \int_{\Omega_t} |h(x, t)|^2 dx \leq - \int_0^t \int_{\Omega_\tau} \rho h_i h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx d\tau \leq c \int_0^t \int_{\Omega_\tau} |h(x, \tau)|^2 dx d\tau,$$

т.е. $F(x, t) \leq c \int_0^t F(x, \tau) d\tau$. Значит, $F(x, t) \equiv 0$. □

2 Субдифференциал выпуклой функции.

Известно, что если выпуклая функция на прямой дифференцируема, то ее производная возрастает. Для произвольных выпуклых функций на \mathbb{R}^n можно построить монотонное многозначное отображение, которое можно рассматривать как обобщение производной.

Определение 2.1. Пусть X — нормированное пространство, X^* — его сопряженное, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Субдифференциалом функции f в точке $x_0 \in X$ называется множество

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : \forall h \in X \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \langle x^*, h \rangle\}.$$

Геометрический смысл: функционал $x^* \in X^*$ принадлежит субдифференциалу, если надграфик функции f всюду лежит не ниже, чем гиперплоскость, задаваемая уравнением $u = f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle$. Это геометрическое соображение и теорема отделимости позволяют доказать

Предложение 3. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, непрерывная в точке x_0 . Тогда $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Доказательство. Так как функция f непрерывна в точке x_0 , то внутренность множества

$$\text{epi } f = \{(x, u) \in X \times \mathbb{R} : u \geq f(x)\}$$

непуста. Применим теорему отделимости к множествам $\text{epi } f$ и $\{(x_0, f(x_0))\}$. Напомним, что линейные непрерывные функционалы на $X \times \mathbb{R}$ имеют вид $(x, u) \mapsto \langle x^*, x \rangle + \alpha u$, где $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Значит, найдутся $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\langle x^*, x_0 \rangle + \alpha f(x_0) \leq \langle x^*, x \rangle + \alpha u, \quad x \in X, \quad u \geq f(x).$$

Если $\alpha < 0$, то подставим $x = x_0$, устремим $u \rightarrow +\infty$ и получим противоречие. Если $\alpha = 0$, то, взяв для каждого $x \in X$ число $u = f(x)$, получаем, что для любого $x \in X$ выполнено $\langle x^*, x - x_0 \rangle \geq 0$, откуда $x^* = 0$. Поэтому $\alpha > 0$ и можно считать, что $\alpha = 1$. Подставляя $u = f(x)$, получаем

$$\langle x^*, x_0 \rangle + f(x_0) \leq \langle x^*, x \rangle + f(x),$$

т.е. $-x^* \in \partial f(x_0)$. □

Аналогично, применяя конечномерную теорему отделимости, получаем

Предложение 4. Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, то $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Из определения следует, что субдифференциал функции в точке является выпуклым замкнутым множеством.

Предложение 5. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая непрерывная функция. Тогда отображение $x \mapsto \partial f(x)$ монотонно.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1^* \in \partial f(x_1)$, $x_2^* \in \partial f(x_2)$. Тогда

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle, \quad f(x_1) \geq f(x_2) + \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle.$$

Сложив эти неравенства, получаем $0 \geq \langle x_1^* - x_2^*, x_2 - x_1 \rangle$, а это и означает монотонность отображения. □

Непосредственным следствием определения субдифференциала является аналог теоремы Ферма:

Теорема 2.1. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда

$$x_0 \text{ — точка минимума } f \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0).$$

Предложение 6. Пусть выпуклая функция f дифференцируема по Гато в точке x_0 . Тогда $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

Доказательство. Пусть $x^* \in \partial f(x_0)$. Тогда x_0 является точкой минимума функции $g(x) = f(x) - \langle x^*, x \rangle$. По теореме Ферма, $g'(x_0) = 0$, т.е. $x^* = f'(x_0)$. Покажем теперь, что $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$, т.е. что x_0 — точка минимума $\tilde{g}(x) = f(x) - \langle f'(x_0), x \rangle$. В самом деле, $\tilde{g}'(x_0) = 0$. Если $\tilde{g}(x) < \tilde{g}(x_0)$ для некоторого $x \in X$, то для любого $t \in [0, 1]$ в силу выпуклости \tilde{g}

$$\tilde{g}(x_0 + t(x - x_0)) - \tilde{g}(x_0) \leq t(\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)),$$

т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(x_0 + t(x - x_0)) - \tilde{g}(x_0)}{t} \leq \tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0) < 0$$

и $\tilde{g}'(x_0) \neq 0$. □

Упражнение. Найти субдифференциал евклидовой нормы в каждой точке.

Теорема 2.2. (теорема Моро–Рокафеллара.) Пусть $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклые функции, f_1 непрерывна в x_0 и $\partial f_2(x_0) \neq \emptyset$. Тогда

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

Доказательство. В случае, когда f_2 является аффинной функцией, утверждение сразу следует из определения.

Докажем включение $\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) \subset \partial(f_1 + f_2)(x_0)$. В самом деле, если $x_i^* \in \partial f_i(x_0)$, $i = 1, 2$, то для любого $x \in X$

$$f_1(x) \geq f_1(x_0) + \langle x_1^*, x - x_0 \rangle, \quad f_2(x) \geq f_2(x_0) + \langle x_2^*, x - x_0 \rangle.$$

Сложив эти два неравенства, получим, что $x_1^* + x_2^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$.

Докажем обратное включение. Сначала проверим, что если $0 \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$, то найдется функционал $x_0^* \in X^*$ такой, что $x_0^* \in \partial f_1(x_0)$, $-x_0^* \in \partial f_2(x_0)$ (тогда $0 \in \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$). Без ограничения общности можно считать, что $f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0$. Из определения субдифференциала следует, что для любого $x \in X$ выполнено $f_1(x) + f_2(x) \geq 0$, т.е. $f_1(x) \geq -f_2(x)$.

Рассмотрим в $X \times \mathbb{R}$ два множества:

$$A = \{(x, u) : u > f_1(x)\}, \quad B = \{(x, u) : u \leq -f_2(x)\}.$$

Эти множества выпуклы и не пересекаются. Так как функция f_1 непрерывна в точке x_0 , то A имеет непустую внутренность. Значит, по теореме отделмости, найдутся $x^* \in X^*$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любых $(x, u) \in A$, $(y, v) \in B$ выполнено

$$\langle x^*, x \rangle + \alpha u \geq \langle x^*, y \rangle + \alpha v.$$

Так же, как при доказательстве непустоты субдифференциала, получаем, что $\alpha > 0$ и можно считать, что $\alpha = 1$. Подставляя $y = x_0$, $u = f(x) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $v = -f_2(x_0) = f_1(x_0)$

и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $-x^* \in \partial f_1(x_0)$. Подставляя $v = -f_2(y)$, $x = x_0$, $u = f_1(x_0) + \varepsilon = -f_2(x_0) + \varepsilon$ и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $x^* \in \partial f_2(x_0)$.

(Геометрически доказательство означает следующее: если взять надграфик функции f_1 и подграфик функции $-f_2$, то они соприкасаются в точке $(x_0, f_2(x_0))$; проводим в ней разделяющую гиперплоскость, которая задается как график аффинной функции, а эта функция определяет искомым линейный функционал.)

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$. Положим $\tilde{f}_1(x) = f_1(x) - \langle x^*, x \rangle$. Тогда $0 \in \partial(\tilde{f}_1 + f_2)(x_0)$ и, в силу доказанного, $0 \in \partial\tilde{f}_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$, т.е. $x^* \in \{x^*\} + \partial\tilde{f}_1(x_0) + \partial f_2(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$. \square

Предложение 7. Пусть X, Y — нормированные пространства, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(x)$, $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Тогда $\partial g(x_0, y_0) = \partial f(x_0) \times \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$, $(x^*, y^*) \in \partial g(x_0, y_0)$. Тогда для любых $x \in X$, $y \in Y$

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle + \langle y^*, y - y_0 \rangle,$$

т.е.

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle + \langle y^*, y - y_0 \rangle.$$

Подставив $x = x_0$, получаем $\langle y^*, y - y_0 \rangle \leq 0$, $y \in Y$, так что $y^* = 0$. Значит, $x^* \in \partial f(x_0)$ и $\partial g(x_0, y_0) \subset \partial f(x_0) \times \{0\}$. Обратное включение тривиально. \square

Предложение 8. Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, то f непрерывна.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдется функционал $x^* \in \partial f(x_0)$. Значит, для любого $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \langle x^*, h \rangle. \quad (2.1)$$

Теперь покажем, что $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq \delta(h)$, где $\delta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Если $n = 1$, то это легко следует из определения выпуклости. Рассмотрим общий случай. Пусть e_i , $1 \leq i \leq n$, — базисные векторы в \mathbb{R}^n . Выберем $t > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства $f(x_0 \pm te_i) - f(x_0) \leq \varepsilon$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $h = t \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i - t \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) = 1$. В силу выпуклости f ,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &\leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i f(x_0 + te_i) + \mu_i f(x_0 - te_i)) - f(x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n [\lambda_i (f(x_0 + te_i) - f(x_0)) + \mu_i (f(x_0 - te_i) - f(x_0))] \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) получаем непрерывность f . \square

3 Вязкопластические однородные среды.

Вязкопластической однородной средой называется однородная вязкая среда, в которой связь $s \in A(e)$ имеет вид $s \in \partial\varphi(e)$, где φ — выпуклая функция переменных $e = (e_{ij})$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(e) \geq \gamma|e|$ для некоторого $\gamma > 0$ и любого e .

Функция φ называется *диссипативным потенциалом*.

Если функция φ является положительно-однородной степени 1 (т.е. $\varphi(\lambda e) = \lambda\varphi(e)$, $\lambda \geq 0$), то среда называется *жесткопластической*.

Множество $\Sigma = \partial\varphi(0)$ выпукло, замкнуто, ограничено и имеет непустую внутренность. Если $s \notin \Sigma$ и $s \in \partial\varphi(e)$, то $e \neq 0$ (т.е. происходит деформация среды). Если s — внутренняя точка Σ и $s \in \partial\varphi(e)$, то $e = 0$. В самом деле, пусть $e \neq 0$. В силу монотонности отображения $e \mapsto \partial\varphi(e)$, для любого $\tilde{s} \in \Sigma$ выполнено $\langle s - \tilde{s}, e \rangle \geq 0$. Так как Σ содержит окрестность нуля, то $\langle s, e \rangle > 0$. Подставив $\tilde{s} = \lambda s$, где $\lambda > 1$, получим противоречие.

Граница множества Σ называется *поверхностью текучести*, уравнение границы этого множества называется *условием текучести*. Физический смысл: если нагрузка на среду мала ($s \in \text{int } \Sigma$), то движения среды не происходит, т.е. $e = 0$; если s выходит за пределы множества Σ , то происходит движение.

Обычно используются условия текучести Мизеса и Треска. Условие текучести Мизеса имеет вид $s_{ij}s_{ij} = 2k^2$, условие текучести Треска —

$$\max\{|s_1 - s_2|, |s_2 - s_3|, |s_3 - s_1|\} = 2k,$$

где s_1, s_2, s_3 — собственные значения s_{ij} .

4 Стационарные медленные движения и вариационный принцип.

Напомним, что $e_v = (e_{ij}(v))_{1 \leq i \leq j \leq 3, (i,j) \neq (3,3)}$, где $e_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ (т.е. это вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^5).

В случае стационарных медленных движений $\frac{dv_i}{dt} = 0$ (в силу стационарности, $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$, а поскольку скорости малы, то слагаемым $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$ мы пренебрегаем), и принцип виртуальных мощностей (1.5) приобретает вид

$$\int_{\Omega} s(x) \cdot e_h(x) dx = \int_{\Omega} fh dx + \int_{\partial\Omega} Ph dS, \quad (4.1)$$

где $s \cdot e_h = \tau_{i\alpha} h_{i\alpha}$, $fh = f_i h_i$. Предположим, что среда является однородной вязко-пластической средой, т.е.

$$s(x) \in \partial\varphi(e_v(x)), \quad (4.2)$$

где φ — диссипативный потенциал. Будем считать, что φ имеет порядок роста не выше степенного, т.е. что существует такое $p > 1$, что $\overline{\lim}_{|e| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(e)}{|e|^p} < \infty$.

Упражнение. Показать, что в этом случае функционал $\Phi_*(e) := \int_{\Omega} \varphi(e) dx$ непрерывен на $L_p(\Omega, \mathbb{R}^5)$.

Рассмотрим функционал

$$J(v) := \int_{\Omega} \varphi(e_v) dx - \int_{\Omega} fv dx - \int_{\partial\Omega} Pv dS \quad (4.3)$$

и разобьем его на два слагаемых: $J(v) = \Phi(v) + L(v)$, где

$$\Phi(v) = \Phi_*(e_v) = \int_{\Omega} \varphi(e_v) dx, \quad L(v) = - \int_{\Omega} fv dx - \int_{\partial\Omega} Pv dS.$$

Нужно естественным образом задать пространство W_0 , на котором будем рассматривать J . В ряде случаев его можно определить аналогично тому, как определялось пространство Соболева.

Пусть E — банахово пространство, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $L_p(\Omega) \subset E \subset L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ и соответствующие операторы вложения непрерывны (на $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ рассматривается топология пространства обобщенных функций $D'(\Omega)$).
2. если $e(\cdot) \in E$, то $e(\cdot)\chi_G(\cdot) \in E$ для любого измеримого подмножества $G \subset \Omega$ (χ_G — характеристическая функция множества G);
3. если $e(\cdot) \in E$, $\Omega_n = \{x \in \Omega : |e(x)| \leq n\}$, то $e(\cdot)\chi_{\Omega_n}(\cdot) \rightarrow e(\cdot)$ в пространстве E ;
4. функционал Φ_* непрерывен на E^5 .

В частности, такому условию удовлетворяет пространство $L_p(\Omega)$, однако его не всегда удобно рассматривать, поскольку может оказаться, что не выполнены условия теоремы существования. Поэтому иногда требуются пространства более общего вида (например, *пространства Орлича*; см. [2]). Соответствующие модели вязкопластических сред рассмотрены в книге [3].

Пусть V — банахово пространство, непрерывно вложенное в $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$. Положим

$$W = \left\{ v \in V : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in E \right\}$$

с нормой $\|v\|_W = \|v\|_V + \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_E$. Предполагается, что функционал L непрерывен на W .

Пример. Если $E = L_p(\Omega)$, $V = L_p(\Omega, \mathbb{R}^3)$, то $W = W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Точно так же, как для пространства Соболева, доказывается, что пространство W полно: если последовательность $\{v^n\}$ фундаментальна в W , то в силу полноты V и E найдутся функции $v \in V$ и $w_{ij} \in E$ такие, что $v^n \xrightarrow{V} v$ и $\frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} \xrightarrow{E} w_{ij}$ при $n \rightarrow \infty$. Так как V непрерывно вложено в $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$, то отсюда следует, что $w_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ (производные в обобщенном смысле).

Считаем, что функционал J задан на некотором замкнутом подпространстве $W_0 \subset W$. (Например, если $W = W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, то в качестве W_0 часто рассматривается $\dot{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ или подпространство векторнозначных функций с нулевой дивергенцией и нулевыми граничными условиями.)

Теорема 4.1. *Функция $v \in W_0$ удовлетворяет соотношениям (4.1), (4.2) тогда и только тогда, когда она является точкой минимума функционала J на пространстве W_0 .*

Обозначим $p' = \frac{p}{p-1}$.

Лемма 4.1. *Линейный функционал F принадлежит $\partial\Phi(v)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $s \in L_{p'}(\Omega, \mathbb{R}^5)$ такая, что*

$$\langle F, u \rangle = \int_{\Omega} s \cdot e_u \, dx, \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} [\varphi(e_v(x) + h(x)) - \varphi(e_v(x)) - s(x)h(x)] \, dx \geq 0 \text{ для любого } h \in E^5. \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть s удовлетворяет (4.4) и (4.5). Достаточно проверить, что функционал F непрерывен. Выберем $\delta > 0$ так, что для любого $h \in E^5$, $\|h\|_{E^5} < \delta$,

выполнено $|\Phi_*(e_v + h) - \Phi_*(e_v)| < 1$. Из (4.4) и (4.5) получаем, что $|\langle F, u \rangle| \leq 1$ при $\|e_u\|_{E^5} < \delta$ (а значит, и при $\|u\|_W < \delta$).

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим функционал $\Psi : E^9 \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Psi(\{e_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3}, \{\omega_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3}, w) = \int_{\Omega} \varphi(\{e_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3, (i,j) \neq (3,3)}, w) dx.$$

Легко видеть, что он выпуклый; в силу свойства 4 пространства E , он непрерывен.

Обозначим $\omega_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $1 \leq i < j \leq 3$.

Определим оператор вложения $I : W_0 \rightarrow E^9 \times V$ по формуле

$$I(u) = (\{e_{ij}(u)\}_{1 \leq i < j \leq 3}, \{\omega_{ij}(u)\}_{1 \leq i < j \leq 3}, u)$$

и функционал $\tilde{F} : I(W_0) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $\langle \tilde{F}, I(u) \rangle = \langle F, u \rangle$. Тогда $\Phi(u) = \Psi(I(u))$.

Покажем, что \tilde{F} можно продолжить до функционала $\Lambda \in \partial\Psi(I(v))$. Идея доказательства такая же, как в теореме о непустоте субдифференциала. Рассмотрим в $E^9 \times V \times \mathbb{R}$ два выпуклых множества: $A = \text{epi } \Psi$ и

$$B = \{(I(u), \Phi(v) + \langle F, u - v \rangle) : u \in W_0\}.$$

Так как функционал Ψ непрерывен и $F \in \partial\Phi(v)$, то к этим множествам можно применить теорему отделимости. Соответствующая гиперплоскость порождается искомым линейным непрерывным функционалом.

Так как $\Lambda \in (E^9 \times V)^*$, то найдутся $\sigma_{ij}^* \in E^*$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, $\tau_{ij}^* \in E^*$, $1 \leq i < j \leq 3$, $v^* \in V^*$ такие, что

$$\langle \Lambda, (\{e_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3}, \{\omega_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3}, u) \rangle = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \langle \sigma_{ij}^*, e_{ij} \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \langle \tau_{ij}^*, \omega_{ij} \rangle + \langle v^*, u \rangle.$$

Поскольку Ψ не зависит явно от e_{33} , ω_{ij} и u , а $\Lambda \in \partial\Psi(I(v))$, то $\sigma_{33}^* = 0$, $u^* = 0$ и $\tau_{ij}^* = 0$ (см. предложение 7). Остается найти вид функционалов $\sigma^* \in E^*$. Вспомним, что $L_p(\Omega)$ непрерывно вложено в E (см. свойство 1). Рассмотрим ограничение σ^* на $L_p(\Omega)$ и получим, что найдется функция $g \in L_{p'}(\Omega)$ такая, что

$$\langle \sigma^*, e \rangle = \int_{\Omega} g \cdot e dx, \quad e \in L_p(\Omega).$$

Пусть $e \in E$. В силу свойства 2 пространства E , можно считать, что $g \cdot e \geq 0$. Из свойства 3 получаем, что $e\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$ в пространстве E , поэтому

$$\int_{\Omega_n} g \cdot e dx = \langle \sigma^*, e\chi_{\Omega_n} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \sigma^*, e \rangle.$$

С другой стороны, $\int_{\Omega_n} g \cdot e dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g \cdot e dx$, так что $\langle \sigma^*, e \rangle = \int_{\Omega} g \cdot e dx$ для любого $e \in E$. □

Нам понадобится понятие измеримого многозначного отображения и теорема Куратовского – Рылль-Нардзевского об измеримой выборке.

Отображение $Z : \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ назовем измеримым, если для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ множество $\{x \in \Omega : Z(x) \cap U \neq \emptyset\}$ измеримо.

Лемма 4.2. (теорема Куратовского – Рыль-Нардзевского). Пусть $Z : \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ — измеримое многозначное отображение и для любого $x \in \Omega$ множество $Z(x)$ замкнуто, $K = \{x \in \Omega : Z(x) \neq \emptyset\}$. Тогда существует измеримая функция $h : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $h(x) \in Z(x)$ для любого $x \in \Omega$.

Доказательство. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим счетное покрытие \mathbb{R}^n открытыми шарами $B_{m,i}$ радиуса 2^{-m} . Определим множества $A_{m,i_1,\dots,i_m} \subset \Omega$ индукцией по m . Пусть $m = 1$. Положим $\tilde{A}_{1,i} = \{x \in \Omega : B_{1,i} \cap Z(x) \neq \emptyset\}$, $A_{1,i} = \tilde{A}_{1,i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{A}_{1,j}$. Эти множества измеримы и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{1,i} = K$. Пусть построены измеримые непересекающиеся множества $A_{m,i_1,\dots,i_m} \subset A_{m-1,i_1,\dots,i_{m-1}}$ такие, что $\bigcup_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} A_{m,i_1,\dots,i_m} = K$ и для любого $x \in A_{m,i_1,\dots,i_m}$ выполнено $Z(x) \cap (\bigcap_{k=1}^m B_{k,i_k}) \neq \emptyset$. Положим

$$\tilde{A}_{m+1,i_1,\dots,i_{m+1}} = \{x \in A_{m,i_1,\dots,i_m} : Z(x) \cap (\bigcap_{k=1}^{m+1} B_{k,i_k}) \neq \emptyset\},$$

$$A_{m+1,i_1,\dots,i_{m+1}} = \tilde{A}_{m+1,i_1,\dots,i_{m+1}} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i_{m+1}-1} \tilde{A}_{m+1,i_1,\dots,i_m,j} \right).$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ такого, что $A_{m,i_1,\dots,i_m} \neq \emptyset$, выберем $y_{m,i_1,\dots,i_m} \in \bigcap_{k=1}^m B_{k,i_k}$. Положим

$$h_m(x) = \begin{cases} y_{m,i_1,\dots,i_m}, & x \in A_{m,i_1,\dots,i_m}, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Последовательность $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится. В самом деле, пусть $x \in K$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $x \in A_{m,i_1,\dots,i_m}$ для некоторых $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$. Поэтому $h_m(x) \in B_{m,i_m}$ и $h_{m+1}(x) \in B_{m,i_m}$, так что $|h_m(x) - h_{m+1}(x)| \leq 2^{-m+1}$.

Пусть $h(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x)$. Функция h измерима и $h(x) \in Z(x)$ для любого $x \in K$, поскольку $\text{dist}(h_m(x), Z(x)) \leq 2^{-m+1}$. \square

Доказательство теоремы 4.1. Функция v является точкой минимума функционала $J(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \partial J(v)$. По теореме Моро–Рокафеллара, $\partial J(v) = \partial \Phi(v) + \partial L(v)$. Так как функционал L линейный, то $\partial L(v) = \{L'(v)\}$,

$$\langle L'(v), h \rangle = - \int_{\Omega} fh \, dx - \int_{\partial \Omega} Ph \, dS.$$

По лемме 4.1, $F \in \partial \Phi(v)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $s \in L_{p'}(\Omega, \mathbb{R}^6)$, для которой выполнены соотношения (4.4) и (4.5).

Покажем, что

$$(4.5) \Leftrightarrow s(x) \in \partial \varphi(e_v(x)) \text{ п.в.}$$

Достаточно доказать импликацию “ \Rightarrow ”. Заметим, что

$$s(x) \in \partial \varphi(e_v(x)) \text{ п.в.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{mes}\{x \in \Omega : \exists z \in \mathbb{R}^5 : \varphi(e_v(x) + z) - \varphi(e_v(x)) < s(x)z\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \text{mes}\{x \in \Omega : \exists z \in \mathbb{R}^5 : \varphi(e_v(x) + z) - \varphi(e_v(x)) < s(x)z - \varepsilon\} = 0.$$

Проверим, что для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение

$$\bar{Z}_\varepsilon : x \mapsto \overline{Z_\varepsilon(x)}, \text{ где } Z_\varepsilon(x) = \{z \in \mathbb{R}^5 : \varphi(e_v(x) + z) - \varphi(e_v(x)) < s(x)z - \varepsilon\},$$

измеримо. В самом деле, пусть $U \subset \mathbb{R}^5$ — открытое множество. Так как функция φ непрерывна, то множество $Z_\varepsilon(x)$ открыто для любого x . Значит, $U \cap \bar{Z}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}^5 \cap U \cap Z_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, т.е.

$$\{x \in \Omega : U \cap \bar{Z}_\varepsilon(x) \neq \emptyset\} = \bigcup_{z \in \mathbb{Q}^5 \cap U} \{x \in \Omega : \varphi(e_v(x) + z) - \varphi(e_v(x)) < s(x)z - \varepsilon\},$$

а это множество измеримо. В частности, множество $K_\varepsilon = \{x \in \Omega : \bar{Z}_\varepsilon(x) \neq \emptyset\}$ измеримо. Пусть $\text{mes } K_\varepsilon > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$. По теореме Куратовского – Рыль-Нардзевского, существует измеримая функция $h : K_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^5$ такая, что $h(x) \in \bar{Z}_\varepsilon(x)$ для любого $x \in K_\varepsilon$. Положим

$$h_M(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x \in K_\varepsilon, \quad |h(x)| \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда для достаточно большого $M > 0$

$$\int_{\Omega} [\varphi(e_v(x) + h_M(x)) - \varphi(e_v(x)) - s(x)h_M(x)] dx < 0.$$

Итак, $0 \in \partial J(v)$ равносильно включению

$$0 \in \{\Lambda_s : s(x) \in \partial\varphi(e_v(x)) \text{ п.в.}\},$$

где

$$\langle \Lambda_s, h \rangle = \int_{\Omega} s(x) \cdot e_h(x) dx - \int_{\Omega} fh dx - \int_{\partial\Omega} Ph dS,$$

а это и означает (4.1). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Механика жесткопластических сред”. М.: Наука, 1981.
- [2] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.
- [3] M. Fuchs, G. Seregin, *Variation Methods for Problems from Plasticity Theory and for Generalized Newtonian Fluids*. Springer, 2000.