Задачи к лекциям по выпуклому анализу

Локуциевский Л.В.

2018

Экзаменационный билет включает в себя 2 теоретических вопроса и 0, 1, 2 или 3 задачи в зависимости от доли k задач из списка, решенных экзаменуемым в течение семестра:

$$k < \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \text{ задачи}, \qquad \frac{1}{3} \leqslant k < \frac{3}{5} \Rightarrow 2 \text{ задачи},$$
$$\frac{3}{5} \leqslant k < \frac{5}{6} \Rightarrow 1 \text{ задача}, \qquad k \geqslant \frac{5}{6} \Rightarrow 0 \text{ задач}.$$

Каждая не решенная во время экзамена задача понижает итоговую оценку на 1 балл.

1. Выпуклые множества и операции над ними.

1.1. Доказать, что если точки x_1, ..., x_{d+1} из $\mathbb{R}^d$ не лежат в одном аффинном пространстве размерности $d-1$ или меньше, то множество $\Delta = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{d+1}\}$ (называемое в этом случае d-мерным симплексом) имеет непустую внутренность.

1.2. Привести пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого не замкнута.

1.3. Верны ли включения $\operatorname{conv}\operatorname{cl} E \subset \operatorname{cl}\operatorname{conv} E$ и $\operatorname{cl}\operatorname{conv} E \subset \operatorname{conv}\operatorname{cl} E$?

1.4. Пусть C_1 и C_2 – выпуклые замкнутые множества. Докажите, что если $\operatorname{ri} C_1 \subset C_2$ и $\operatorname{ri} C_2 \subset C_1$, то $C_1 = C_2$.

1.5. Найти среднюю высоту единичного куба в $\mathbb{R}^3$.

1.6. Показать, что сумма по Минковскому замкнутого и компактного множеств – замкнута.

1.7. Показать, что сумма по Минковскому двух замкнутых выпуклых множеств может быть не замкнута

2. Теоремы отделимости и теорема Каратеодори

2.1. Докажите, что если множество $C \subset \mathbb{R}^d$ выпукло, то его граница совпадает с границей его замыкания: $\partial C = \partial \operatorname{cl} C$. Приведите контрпример для случая, когда множество не выпукло.

2.2. Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ - выпуклое множество. Докажите, что если $x_0 \in \operatorname{ri} C$ можно отделить от C гиперплоскостью, то только несобственным образом. Равносильно: разделяющая гиперплоскость содержит $\operatorname{aff} C$. Равносильно: разделяющий ковектор p перпендикулярен $\operatorname{aff} C$. Равносильно: $C \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \langle p, x\rangle = c_0\}$.

2.3. Докажите (используя теоремы отделимости), что если C_1 и C_2 – выпуклые подмножества $\mathbb{R}^d$, то $\operatorname{ri}(C_1 + C_2) = \operatorname{ri} C_1 + \operatorname{ri} C_2$. Попробуйте также придумать еще одно доказательство, не использующее теорему отделимости.

2.4. Доказать, что если C_1 и C_2 – выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{ri} C_1 \cap \operatorname{ri} C_2 \neq \emptyset$ и $\dim(C_1 + C_2) = d$, то множества C_1 и C_2 нельзя разделить

2.5. Привести пример такого линейного бесконечномерного пространства X (не снабженного ни нормой, ни топологией) и такого его выпуклого подмножества C, что с одной стороны $0 \notin C$, а с другой стороны для любого линейного функционала $p \neq 0$ на X найдется такой вектор $x \in C$, что $\langle p, x\rangle < 0$.

3. Простейшие свойства выпуклых функций

3.1. Описать все несобственные выпуклые функции с замкнутым надграфиком.

3.2. Докажите, что собственная выпуклая функция f на $\mathbb{R}^d$ ограничена на любом компактном множестве $K \subset \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$.

3.3. Докажите, что собственная выпуклая замкнутая функция на $\mathbb{R}^1$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.

3.4. (i) Пусть f_1 и f_2 – выпуклые замкнутые функции на $\mathbb{R}^d$. Докажите, что если $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ для всех $x \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_1$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_2$, то $f_1(x) = f_2(x)$ для всех x. (ii) Останется ли утверждение верным, если заменить оба неравенства на противоположные?

3.5. Докажите, что функция расстояния $f(x) = \operatorname{dist}(x, C)$ от точки до выпуклого множества C является выпуклой.

3.6. Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ – какая-то не обязательно выпуклая функция. Рассмотрим два утверждения: (i) функция f непрерывна и (ii) график f замкнут. Верны ли следствия (i)⇒(ii) и (ii)⇒(i)? А если $f(x) \neq \pm\infty$ для всех x?

3.7. Верно ли, что если собственная функция f выпукла, то выпуклы множества $f^{-1}(-\infty; c]$ для всех $c \in \mathbb{R}$? Верно ли обратное утверждение: если все множества $f^{-1}(-\infty; c]$ выпуклы при всех $c \in \mathbb{R}$, то собственная функция f выпукла?

3.8. Докажите следующую теорему существования: если замкнутая функция в конечномерном пространстве имеет ограниченную эффективную область, то она достигает своего минимума.

4. Субдифференциал

4.1. Докажите, что если $\partial f(x) \neq \emptyset$, то функция f полунепрерывна снизу в x.

4.2. Предположим f – выпуклая собственная функция на $\mathbb{R}^d$ и $k = \dim \operatorname{dom} f < d$ и $0 \in \operatorname{aff} \operatorname{dom} f$. Пусть $\varphi : \operatorname{aff} \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}^k$ – линейный изоморфизм. Тогда f можно рассмотреть как функцию на $\mathbb{R}^k$, $g = f \circ \varphi^{-1}$, которая тоже будет выпуклой функцией. Пусть $L^\perp$ обозначает множество ковекторов, перпендикулярных подпространству L. Докажите, что для $x_0 \in \operatorname{dom} f$ выполнено

$$\partial f(x_0) = (\operatorname{aff} \operatorname{dom} f)^\perp \oplus \varphi^*[\partial g(\varphi(x_0))].$$

4.3. Докажите, что в любой точке $x_0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$ субдифференциал $\partial f(x_0)$ есть сумма линейного подпространства $(\operatorname{aff} \operatorname{dom} f)^\perp$ и компактного выпуклого множества, аффинная оболочка которого трансверсальна $(\operatorname{aff} \operatorname{dom} f)^\perp$.

4.4. Вычислить субдифференциал нормы в 0.

4.5. Докажите, что субдифференциал выпуклой функции циклично монотонен, т.е. для любых x_i и $p_i \in \partial f(x_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, выполнено

$$\langle p_0, x_1 - x_0 \rangle + \langle p_1, x_2 - x_1 \rangle + \dots + \langle p_{n-2}, x_{n-1} - x_{n-2} \rangle + \langle p_{n-1}, x_0 - x_{n-1} \rangle \leqslant 0.$$

4.6. Пусть $\rho : \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^{d*}}$ – многозначное отображение, т.е $\rho(x) \subset \mathbb{R}^{d*}$ для каждого $x \in \mathbb{R}^d$. Докажите, что ρ циклично (т.е. для любого набора пар $p_i \in \rho(x_i)$ выполняется неравенство из упражнения 4.5) тогда и только тогда, когда найдется такая выпуклая, замкнутая, собственная функция $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$, что $\rho(x) \subset \partial f(x)$ при всех x.

5. Выпуклый принцип Лагранжа

5.1. Докажите лемму Фаркаша: пусть $f_0, f_1, \dots, f_n$ – линейные (однородне) функции на $\mathbb{R}^d$, тогда если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ из неравенств $f_i(x) \geqslant 0$ при $i \geqslant 1$ следует неравенство $f_0(x) \geqslant 0$, то найдутся неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

5.2. Остается ли верной теорема о разрешимости системы выпуклых неравенств если отказаться от требования собственности?

5.3. Остается ли верной модификация теоремы о разрешимости системы выпуклых неравенств, если в первом пункте заменить строгое неравенство $f_i(x) < 0$ нестрогим $f_i(x) \leqslant 0$, а во втором наоборот – нестрогое $\sum_i \lambda_i f_i(x) \geqslant 0$ на строгое $\sum_i \lambda_i f_i(x) > 0$.

6. Основные выпуклые функции

6.1. Пусть C – непустое, выпуклое, компактное множество. Докажите, что s_C является полунормой на $\mathbb{R}^{d*}$, если и только если $-C = C$. При каких дополнительных условиях на C опорная функция s_C будет нормой?

6.2. Доказать, что если множество C выпукло и $0 \in \mathrm{ri}\, C$, то $\mu_C = \mu_{\mathrm{cl}\, C}$.

6.3. Привести примеры (i) такого выпуклого множества C, что $0 \in C$, но $\mu_C \neq \mu_{\mathrm{cl}\, C}$ и (ii) такого множества C, что $0 \in \mathrm{int}\, C$, но $\mu_C \neq \mu_{\mathrm{cl}\, C}$.

6.4. Описать все такие функции $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d*}$, что g и $-g$ монотонны, т.е. $\langle g(x) - g(y), x - y \rangle = 0$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$.

6.5. Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ – положительно однородная неотрицательная функция и $f(0) = 0$. Доказать, что $f = \mu_{\{x : f(x) \leqslant 1\}}$.

6.6. Пусть $\|\cdot\|$ – какая-либо норма на $\mathbb{R}^d$ и $B = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ – единичный шар в этой норме. Докажите, что B – выпуклое, компактное множество, $0 \in \mathrm{int}\, B$ и $\mu_B(x) = \|x\|$.

6.7. Привести пример такого выпуклого замкнутого множества $C \subset \mathbb{R}^d$, что его функция Минковского μ_C не замкнута.

6.8. Докажите, что если множество C выпукло и компактно, то функция μ_C выпукла и замкнута.

7. Выпуклые операции

7.1. Построить пример такой функции f, что $\mathrm{epi}\,\mathrm{conv} f \neq \mathrm{conv}\,\mathrm{epi} f$.

7.2. Привести пример такой замкнутой функции f, что функция $\mathrm{conv} f$ не замкнута. Этот же пример показывает, что, вообще говоря, $\mathrm{cl}\,\mathrm{conv} f \neq \mathrm{conv}\,\mathrm{cl} f$.

7.3. Пусть на единичной сфере $S^{d-1} = \{|x| = 1\} \subset \mathbb{R}^d$ задана некоторая полунепрерывная снизу функция $h : S^{d-1} \to \mathbb{R}$. Докажите, что существует такая выпуклая замкнутая функция $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$, что f и h совпадают на S^{d-1}.

7.4. Докажите, что если выпуклая функция f является собственной, то ее замыкание $\mathrm{cl} f$ также является собственной функцией.

7.5. Пусть f – выпуклая функция. Докажите, что если $x_1 \in \mathrm{ri}\,\mathrm{dom} f$, то для любой точки x_0 существует предел $\lim_{\lambda \to +0} f(x_\lambda)$ и он равен $\mathrm{cl} f(x_0)$.

7.6. Зафиксируем произвольное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^d$. Выразите функцию расстояния $d(x, C)$ от точки до множества через стандартные выпуклые функции и операции.

7.7. Привести пример двух таких выпуклых функций f и g, что $\mathrm{cl}(f+g) \neq \mathrm{cl} f + \mathrm{cl}\, g$. Доказать, что если $\mathrm{ri}\,\mathrm{dom} f \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$, то все же $\mathrm{cl}(f+g) = \mathrm{cl} f + \mathrm{cl}\, g$.