Докладчик: Анастасия Викулова (МГУ, Мехмат, кафедра высшей геометрии и топологии)
Название: Первое собственное число задачи Робена для областей в $\mathbb{R}^n$

Оценки k-го собственного значения $\lambda = \lambda_k(\Omega)$ оператора Лапласа $-\Delta u = \lambda u$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ представляют значительный интерес. Этот вопрос интенсивно изучается математиками и физиками с давних времен, во всяком случае с "Теории звука" Рэлея (J. W. S. Rayleigh (1877)). Первоначально внимание было уделено краевым условиям первого (задача Дирихле) и второго рода (задача Неймана). Было доказано, что первое собственное число минимизируется для задачи Дирихле (G.Faber (1923), E.Krahn (1924)) и максимизируется для задачи Неймана (G.Szeg ö (1954), H.F.Weinberger (1956)) на шаре среди областей с фиксированным объемом. Что же касается третьего краевого условия $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$, где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, называемого также условием Робена (в честь французского математика Victor Robin (1855 – 1897)), то основные работы на эту тему появились сравнительно недавно. Интерес представляют оценки $\lambda_k^\alpha(\Omega)$ через $\lambda_k^\alpha(B)$, где B — шар, граница которого имеет тот же объем, что и граница области Ω, т.е. $|Vol_{n-1}(\partial B)| = |Vol_{n-1}(\partial\Omega)|$.

В докладе обсуждается гипотеза

$$\lambda_1^\alpha(\Omega) \le \lambda_1^\alpha(B)\,, \quad \text{если} \quad \alpha \le 0 \quad \text{и} \quad |Vol_{n-1}(\partial B)| = |Vol_{n-1}(\partial\Omega)|\,.$$

Будет доказана справедливость этой гипотезы для областей в $\mathbb{R}^3$ в случае, когда граница диффеоморфна сфере и для областей в $\mathbb{R}^n$ для произвольного n при некоторых ограничениях на среднюю кривизну границы.