Свойства гладкости в задачах со свободными границами

Д.Е. Апушкинская

Университет земли Саар, Германия

Важную роль в современном анализе уравнений с частными производными играют задачи со свободными границами, имеющие многочисленные приложения в различных областях науки. Словосочетание "задача со свободными границами" означает, что мы имеем дело с задачей, содержащей два а-приори неизвестных объекта: решение уравнения с частными производными и неизвестное множество. Граница этого неизвестного множества называется свободной границей.

На самом деле, свободная граница не является полностью свободной. В корректно поставленных задачах свободная граница определяется как множество точек, в которых решение удовлетворяет определенным условиям. Проблема состоит лишь в том, что это множество точек а-приори неизвестно (оно свободно именно в этом смысле).

В докладе будет дан краткий обзор результатов для специального класса задач со свободными границами - так называемых задач типа задачи с препятствием. Приведем математическую формулировку задачи: найти функцию u и множество $\Omega(u) \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} \Delta u - \partial_t u = f(x,t,u) & \text{в} \quad \Omega(u) \cap \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}, \\ \mathcal{B}(u, Du) = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega(u) \cap \mathcal{E}, \\ u = \phi & \text{на} \quad \partial_{par}\mathcal{E}. \end{cases} \tag{1}$$

Мы предполагаем, что функция f ограничена и не обязана быть непрерывной, т.е. допускается скачок f через поверхность, на которой u обращается в нуль. Это множество разрывных точек изначально неизвестно и, следовательно, оно считается свободным.

Мы обсудим различные вопросы локальной регулярности (оптимальную гладкость решений, поведение blow-up пределов, свойства свободных границ), возникающие в задачах типа (1). Особо подчеркнем, что большая часть параболической (эллиптической) техники не применима к задачам вида (1) . Причиной этого является отсутствие какой-либо априорной информации о регулярности свободной границы. Получение такой информации является частью задачи. Поэтому, мы вынуждены комбинировать идеи из вариационного исчисления с геометрическими наблюдениями, приемами масштабирования, blow-up техникой, а также широко применять методы анализа тепловых и гармонических функций.