

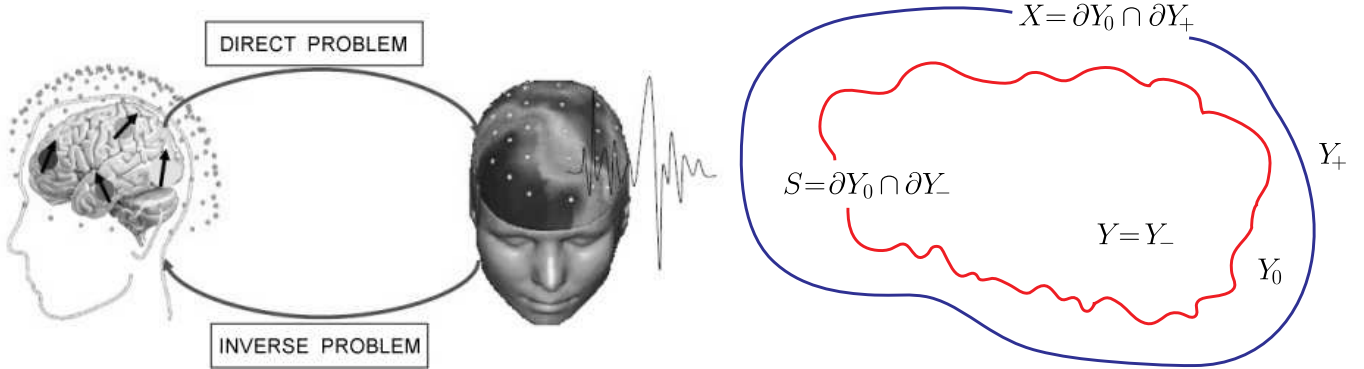
Обратные задачи в магнито-электросканировании (в энцефалографии, для магнитных микроскопов и т.п.)

А.С. Демидов¹

Аннотация

Вопреки бытующему мнению о некорректности обратной МЭЭГ-задачи, устанавливается ее однозначная разрешимость в рамках системы уравнений Максвелла [1]. Решением этой задачи является распределение $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{y})$ токовых диполей нейронов головного мозга, занимающего область $Y \subset \mathbb{R}^3$. Исходными данными являются неинвазивные измерения электрических и магнитных полей, индуцированных токовыми диполями. Решение имеет вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0 \delta \Big|_{\partial Y}$, где \mathbf{q}_0 - обычная функция, определенная в Y , а $\mathbf{p}_0 \delta \Big|_{\partial Y}$ есть δ -функция на границе области Y с некоторой плотностью \mathbf{p}_0 .

Обратная МЭЭГ-задача — это задача о нахождении распределения так называемых токовых диполей $\mathbf{q} : Y \rightarrow \mathbb{R}^3$ (токовых дипольных моментов [2]) в нейронах головного мозга, занимающего множество $Y \subset \mathbb{R}^3$. При этом, исходной информацией являются данные магнитной $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$, а также электрической $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$ индукции, измеренных на поверхности X , являющейся внутренней частью надетого на голову шлема с датчиками SQUID (Superconducting quantum Interference device) [2]–[3]. Через \mathcal{H} и \mathcal{E} обозначены напряженности магнитного и электрического полей. Параметры $\mu = \mu(\mathbf{x}) > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ — это магнитная и диэлектрическая проницаемости. Для биосред $\mu \approx \mu_0$ (см. <http://ilab.xmedtest.net/?q=node/3521>), где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Однако мы не будем предполагать, что $\mu = \text{const}$, чтобы не исключать другие приложения. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x})$, вообще говоря, различна в $Y = Y_-$, Y_0 и Y_+ , где Y_0 — область, занимаемая тканями (череп, ...), находящимися между $Y = Y_-$ (т.е. областью головного мозга) и областью Y_+ , соответствующей окружающему голову воздуху.



На рисунке слева условно показано, что можно регистрировать на поверхности головы магнитное поле \mathcal{B} и электрическое поле \mathcal{E} , индуцированное токовыми диполями \mathbf{q} в нейронах головного мозга. Проблема заключается в том, чтобы по этим данным измерений \mathcal{B} и \mathcal{E} в конечном наборе точек $\mathbf{x}_k \in X$ найти распределение диполей \mathbf{q} . Эта задача называется *обратной*, в отличие от *прямой*, в которой по заданному распределению диполей вычисляются магнитное и электрическое поля по формулам типа Био-Савара.

Будем опираться на уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \mu \partial_t \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \text{rot } \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) &= 0, & \text{div } \mathcal{B}(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ -\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) + \text{rot } \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{J}^v(\mathbf{x}) + \mathbf{J}^p(\mathbf{x}), & \text{div } \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) &= \rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{J}^v = \sigma \mathcal{E}$ — так называемый объемный или, как говорят, омический ток (точнее, его плотность), ибо он подчинен закону Ома, связанному с коэффициентом электропроводности $\sigma = \sigma(\mathbf{x}) \geq 0$,

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова и Московский физико-технический институт (государственный университет). E-mail: demidov.alexandre@gmail.com

который считаем не зависящим от t . Отметим, что физически оправданы такие условия:

$$\sigma_+ = 0 \text{ on } Y_+, \quad \sigma_0 > 0 \text{ on } Y_0, \quad \sigma_- > \sigma_0 \text{ on } Y_-.$$

Объемный ток есть результат воздействия макроскопического электрического поля на носители заряда в проводящей среде головного мозга. Нейронная же активность вызывает так называемый первичный (primary, principal) ток \mathbf{J}^p . Он возникает в результате диэлектрической поляризации и представляет собой движение зарядов внутри или вблизи клетки. Объемная плотность таких зарядов обозначена через ρ . Частицы, обладающие этими зарядами, входят в состав молекул. Они смещаются из своих положений равновесия под действием внешнего электрического поля, не покидая молекулы, в состав которой они входят.

Существенным является обстоятельство, особо отмеченное в фундаментальной работе [2]. Оно связано с соотношением частоты ω колебаний электромагнитного поля $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ и частоты электрических колебаний в клетках головного мозга. Проведенный в [2] (на стр. 426) анализ показывает, что оправдано квазистатическое приближение для системы (1). Там же, на той же странице, дополнительно отмечается: “Токовый диполь \mathbf{q} , аппроксимирующий локализованный первичный ток, является широко используемой концепцией в нейромагнетизме . . . В приложениях ЭЭГ и МЭГ используется токовый диполь как эквивалентный источник однонаправленного первичного тока, который может распространяться на несколько квадратных сантиметров коры.” Такого рода вывод о допустимости квазистатического приближения справедлив не только для клеточной биофизики, но и в ряде других задач, в том числе, для сканирующих магнитных микроскопов [4]. Тем самым, вместо уравнений (1) будем опираться на следующие

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \text{rot}\mathbf{B} = \mu(\sigma\mathbf{E} + \mathbf{q}), \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \text{div}\mathbf{D} = \rho. \quad (2)$$

В силу теоремы Стокса–Пуанкаре,

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \text{a} \quad \text{div}\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}. \quad (3)$$

Поскольку $\text{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho$, то

$$-\varepsilon\Delta\Phi - \nabla\varepsilon\nabla\Phi = \rho. \quad (4)$$

Согласно физическим представлениям, потенциал $\Phi = \Phi_\rho$ поля $\mathbf{E}_\rho = -\nabla\Phi$ на бесконечности есть константа, которую можно считать равной нулю. По аналогичным причинам, векторный потенциал \mathbf{A} поля $\mu\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$ тоже выбираем равным нулю на бесконечности. Так как

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \nabla\text{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}, \quad \text{rot}(\mu\mathbf{H}) = \mu\text{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H} \times \nabla\mu, \quad (5)$$

то $\Delta\mathbf{A} = -\text{rot}(\mu\mathbf{H}) + \nabla\text{div}\mathbf{A} = -\mu\text{rot}\mathbf{H} + \mathbf{H} \times \nabla\mu + \nabla\text{div}\mathbf{A}$. Но $\text{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{q}$, а $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Поэтому, полагая $\mathbf{Q} = \mu\mathbf{q}$, $\sigma_\mu = \sigma\mu$, имеем

$$\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{Q} + \nabla[\sigma_\mu\Phi + \text{div}\mathbf{A}] - \Phi\nabla\sigma_\mu + \mathbf{H} \times \nabla\mu. \quad (6)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} определяется с точностью до потенциального поля. Действительно, имеем: $\text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \mathbf{A} - \mathbf{A}^* = \nabla\varphi$, т.е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \nabla\varphi$, где φ — некоторая функция. Взяв в качестве φ решение² уравнения $\Delta\varphi = -\text{div}\mathbf{A}^* - \sigma_\mu\Phi$, подчиненное условию $\varphi|_\infty = 0$ (поскольку $\mathbf{A}^*|_\infty = 0$, $\Phi|_\infty = 0$), получим

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{x})\nabla\sigma_\mu(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}) \times \nabla\mu(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Отметим, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\rho$, как и Φ , зависит от ρ .

Полагая $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где $\Delta a_j(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, $a_j(\infty) = 0$, т.е. $a_j(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|}$, получаем

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) \stackrel{(7)}{=} - \int \mathbf{F}(\mathbf{y})\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \Delta \left[- \int \mathbf{F}(\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right].$$

²Оно зависит от Φ_ρ и потому от ρ .

Отсюда

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{F}(\mathbf{y}) \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{4\pi} \int \left(\mathbf{Q}(\mathbf{y}) + \Phi_\rho(\mathbf{y}) \nabla \sigma_\mu(\mathbf{y}) - \mathbf{H}(\mathbf{y}) \times \nabla \mu(\mathbf{y}) \right) \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (8)$$

ибо уравнение Лапласа имеет единственное решение, обращающееся в ноль на бесконечности (как уже было отмечено, $\mathbf{A}|_\infty = 0$). В итоге, получаем интегральное уравнение I-рода

$$\int_Y \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Y, \quad (9)$$

правая часть которого, задаваемая формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 4\pi \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \int \left(\Phi_\rho(\mathbf{y}) \nabla \sigma_\mu(\mathbf{y}) - \mathbf{H}(\mathbf{y}) \times \nabla \mu(\mathbf{y}) \right) \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (10)$$

полностью определена полями $\mathbf{E} = -\nabla \Phi_\rho$ и $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}_\rho$, зависящими от функционального параметра ρ .

Можно считать [2]–[3], что компоненты вектора $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ достаточно гладкие, во всяком случае, принадлежат соболевскому пространству $\mathbf{H}^s(Y) = (H_1^s(Y), H_2^s(Y), H_3^s(Y))$, где $s > 3/2$. Введем пространство³

$$\mathcal{H}^{s-2}(Y) \stackrel{def}{=} \mathbf{H}^{s-2}(Y) + \mathbf{H}^{s-1}(\partial Y) \otimes \delta|_{\partial Y},$$

где $\delta|_{\partial Y}$ — δ -функция на ∂Y .

Теорема 1 (см. [5]) *Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H}^{s-2}(Y) \ni \mathbf{Q} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{Q} \stackrel{def}{=} \int_Y \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \in \mathbf{H}^s(Y)$ осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{H}^{s-2}(Y)$ и $\mathbf{H}^s(Y)$. Тем самым, уравнение (9) однозначно разрешимо, а его решение имеет вид*

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_0(\mathbf{y}') \delta|_{\partial Y} \in \mathcal{H}^{s-2}(Y). \quad (11)$$

Тот факт, что фигурирующие здесь поля $\mathbf{E} = -\nabla \Phi_\rho$ и $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}_\rho$ зависят от функционального параметра ρ , позволяет при наличии данных измерения этих полей в конечном наборе точек \mathbf{x}_k восстановить их в какой-то мере, решая задачу минимизации функционала следующего типа

$$\rho \mapsto G(\rho) \stackrel{def}{=} \|\mathbf{E}(\mathbf{x}_k) + \nabla \Phi_\rho|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}\|^2 + \|\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) - \text{rot} \mathbf{A}_\rho|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}\|^2. \quad (12)$$

Конечно, в любом случае эти поля будут восстановлены с некоторой погрешностью. Ее минимизация может быть достигнута методами оптимальной интерполяции (см., например, [6]–[8]). При этом, в отсутствии какой-либо информации, скажем, о поле \mathbf{E} , неопределенность восстановления поля \mathbf{B} существенно увеличивается, она будет не более, чем с точностью до потенциального поля.

Отметим также, что в [9] установлена связь между решением \mathbf{q} интегрального уравнения (9) и решением \mathbf{u} интегрального уравнения II-рода

$$\eta^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \int_Y \frac{\mathbf{u}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Y, \quad \eta > 0. \quad (13)$$

А именно, справедлива

Теорема 2 [9] *Решение уравнения (13) представимо в виде*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{p}_0(\mathbf{y}') \varphi e^{-\mathbf{y}_n/\eta} + r_0(\mathbf{x}, \eta), \quad (14)$$

где $\|r_0\|_{L^2} \leq C\sqrt{\eta}$, \mathbf{y}_n есть расстояние вдоль нормали от \mathbf{x} до $\mathbf{y}' \in \Gamma$, а $\varphi \in C^\infty(\bar{Y})$, $\varphi \equiv 1$ в малой окрестности ∂Y и $\varphi \equiv 0$ вне несколько большей окрестности.

³В [5] это пространство обозначено так: $H_{s-2,0}^{(\kappa_0)}$. В рассматриваемом здесь случае так называемый индекс факторизации κ_0 равен -1 .

Формула (14) может служить основой для численного решения задачи (9).

Отметим еще одно обстоятельство. Если данные электрического поля не заданы, т.е. они априори произвольны, то правая часть уравнения (9) определена, как было отмечено выше, не более, чем с точностью до $\nabla\varphi$, где функция φ подчинена условию: $\Delta\varphi \in H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$. Согласно теореме 1, в этом случае компоненты (q_1, q_2, q_3) любого решения (11) тоже линейно зависимы и потому имеется бесконечномерная неоднозначность в выборе решения. В случае $Y = \mathbb{R}^2$ этот факт был разными методами установлен в [10] и [11] (см. также [12]).

Автор признателен М.А.Галченковой и Т.А. Строгановой за полезные обсуждения, а также К.Ю. Осипенко за информацию о работах [6]–[8], посвященных вопросам интерполяции.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 15-01-03576, 16-01-00781, 17-01-00809).

§ Список литературы

- [1] A.S. Demidov (2017) The inverse Magnetoencephalography problem and its flat approximation, *Control Theory, Integral Geometry, and Inverse Problems*. Euler International Math. Institut, St.Petersburg, June 12-18, 2017, Conference handbook and proceedings, 8-9.
- [2] M. Hämmäläinen et al (1993) Magnetoencephalography — theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 65, No 2, 413-497.
- [3] T.A. Stroganova et al (2011) EEG alpha activity in the human brain during perception of an illusory kanizsa square, *Neuroscience and Behavioral Physiology*, Vol. 41 (2), 130-139.
- [4] Y. Martin et al (1987) Magnetic imaging by “force microscopy” with 1000 Å resolution. *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 50, 1455–1547.
- [5] A.S. Demidov (1973) Elliptic pseudodifferential boundary value problems with a small parameter in the coefficient of the leading operator, *Math. USSR-Sb.*, 20:3, 439–463.
- [6] K.Yu. Osipenko (2016) Optimal recovery of linear functionals and operators *Communication on Applied Mathematics and Computation* Vol. 30, No. 4, 459-482.
- [7] C.A. Micchelli et al (1976) The optimal recovery of smooth functions *Numer Math*, 26: 191-200.
- [8] P.W. Gaffney et al (1976) Optimal interpolation *Lecture Notes in Math*, 506: 90-99.
- [9] А.С. Демидов (1975) Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений с малым параметром при старшем операторе, *Тр. ММО*, 32, Издательство Московского университета, М., 1975, 119–146.
- [10] L Baratchart et al., (2013) Characterizing kernels of operators related to thin-plate magnetizations via generalizations of Hodge decompositions, *Inverse Problems* **29**, 1-29.
- [11] A.S. Demidov et al (2015) On inverse problem magneto-encephalography, *Quasilinear equations, inverse problems and their applications*. Moscow, 30.11.2015–02.12.2015, Conference handbook and proceedings, 22.
- [12] М.А.Галченкова, *Inverse magnetoscaning problem in the flat case*, *Numerical analysis*, Eurasian Mathematical Journal, 2018 (to appear).