Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О вычислении средней временной выгоды при эксплуатации структурированной популяции

Егорова Анастасия Владимировна
Студент (магистр)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия
E-mail: nastik.e@bk.ru

Рассматривается неоднородная популяция, в которой $x(k) = x_1(k), \ldots, x_n(k)$ — количество особей каждого из n различных видов в момент $k = 0, 1, 2, \ldots$. Введем $U = \{\overline{u} : \overline{u} = (u(0), u(1), \ldots, u(k), \ldots)\}$, где $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$, $\overline{u} \in U$ — управление сбором. Тогда модель эксплуатации популяции имеет вид

$$x(k+1) = F\big((1 - u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+ = x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$, $(1 - u_i(k))x_i(k)$ — количество оставшихся особей i-го вида в момент k после сбора, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $f_i(x)$ — вещественные неотрицательные функции, такие, что $f_i(0) = 0$ и $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$, $i = 1, \ldots, n$.

Стоимость всей добываемой продукции равна $z(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k) u_i(k)$, где $C_i \geqslant 0$ — стоимость единицы продукции. Для любых $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ определим среднюю временную выгоду от извлечения ресурса [1]

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j)\,. \tag{2}$$

Необходимо построить такой способ эксплуатации популяции, при котором значение функции (2) максимально.

При стационарным режиме эксплуатации, когда $u(k) = u^0 = (u^0_1, \ldots, u^0_n) \in [0, 1]^n$, система (1) имеет вид

$$x(k+1) = F\big((1 - u^0)x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Пусть $\widehat{x}(u^0) = \big(\widehat{x}_1(u^0), \ldots, \widehat{x}_n(u^0)\big)$ — устойчивая неподвижная точка системы (3) и $A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$ — множество притяжения этой точки. Тогда при стационарном режиме для всех $x(0) \in A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$ выполнено равенство $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \sum_{i=1}^{n} C_i \widehat{x}_i(u^0) u^0_i$. Если система (3) имеет устойчивый цикл $B(u^0) = \big\{\beta^0(u^0), \ldots, \beta^{\ell-1}(u^0)\big\}$ длины $\ell \in \mathbb{N}$, тогда $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \dfrac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{n} C_i \big(\beta^0_i(u^0) + \ldots + \beta^{\ell-1}_i(u^0)\big) u^0_i$.

Теорема. Предположим, что выполнены условия: 1) функция $D(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \big(f_i(x) - x_i\big)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ и x^*_i; 2) точка $F(x^*)$ — устойчивое положение равновесия системы (3) при $u^0 = u^* = \big(1 - \frac{x^*_1}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x^*_n}{f_n(x^*)}\big)$. Тогда для любого $x(0)$ из некоторой окрестности точки $F(x^*)$ функция (2) достигает максимального значения $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(x^*) = \sum_{i=1}^{n} C_i \big(f_i(x^*) - x^*_i\big)$ при стационарном режиме эксплуатации $\overline{u}^* = (u^*, \ldots, u^*, \ldots)$.

Источники и литература

1) Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. No. 1. С. 48-58.